

© Е.М. СОРОКИНА<sup>1</sup>, А.Г. ОБУХОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Военный учебно-научный центр сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации» (филиал в г. Тюмень),

<sup>2</sup>Тюменский государственный нефтегазовый университет  
semaia@mail.ru, aobukhov@tsogu.ru

УДК 519.63+533.6

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ  
СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСТАЦИОНАРНОГО  
КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА\***

**COMPUTATIONAL INVESTIGATION  
OF TEMPERATURE DEPENDENCE OF SPEED CHARACTERISTICS  
OF NON-STATIONARY GAS CONVECTION CURRENT**

*АННОТАЦИЯ.* Рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса, описывающая течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести. Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными. За начальные условия принимаются функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье-Стокса. В качестве краевых условий для отдельных начально-краевых задач предлагаются конкретные соотношения. Решения полной системы уравнений Навье-Стокса строятся численно с использованием явной разностной схемы в прямоугольном параллелепипеде. Приведены результаты расчетов температурной зависимости скоростей конвективного потока вязкого сжимаемого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести. Показано, что максимальные компоненты скорости течения газа в конвективном потоке линейно зависят от максимальной температуры нагрева нижней плоскости расчетной области. Построены мгновенные линии тока конвективного течения, которые существенно зависят от температуры нагрева.

*SUMMARY.* We consider the full Navier-Stokes equations describing the flow of a compressible viscous heat-conducting gas under gravity. The viscosity and thermal conductivity coefficients are taken to be constant. The functions that are exact analytical solutions of the complete system of Navier-Stokes equations are taken as initial conditions. Specific ratios are suggested as boundary conditions for some initial boundary value problems. The solutions of the complete system of Navier-Stokes equations are solved numerically using an explicit difference scheme in a rectangular parallelepiped. The calculation results of the temperature dependence of the convective flow speed of viscous compressible heat-conducting gas under gravity are presented. It is shown, that the maximum components of the gas flow speed in a convective flow are linearly dependent on the maximum heating temperature of a lower plane of the computational domain. Instantaneous streamlines of the convective flow are built. They essentially depend on the heating temperature.

---

\* Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00198) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1.8490.2013).

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Система уравнений газовой динамики, полная система уравнений Навье-Стокса, краевые условия.

**KEY WORDS.** The system of equations of gas dynamics, complete system of Navier-Stokes equations, boundary conditions.

**Введение.** Для исследования сложных течений газа в трубах или в свободных восходящих закрученных потоках желательнее использовать модели упругой сплошной среды, наиболее адекватно описывающие физические процессы в указанных течениях. К числу таких моделей вполне можно отнести модели, основанные либо на решении системы уравнений газовой динамики [1], либо на решении полной системы уравнений Навье-Стокса [2]. В первом случае решения моделируют течения идеального политропного газа, а во втором — течения упругой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности.

Детальные теоретические исследования, проведенные в последние годы [3-7], подтвердили предложенную в [8] общую схему возникновения и последующего функционирования восходящего закрученного потока. В работах [9-11] эта схема получила и экспериментальное подтверждение. В указанных работах были изучены течения газа в разных частях восходящего закрученного потока, а с работ [12-14] начался новый цикл исследований сложных течений газа, предполагающих математическое моделирование и численные расчеты трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в целом.

Целью данной работы является численный расчет скоростных характеристик трехмерного нестационарного конвективного течения газа, вызванного локальным прогревом нижней поверхности и изучение их зависимости от максимальной температуры нагрева.

**Полная система уравнений Навье-Стокса.** Для описания сложных течений упругой сплошной среды, обладающей диссипативными свойствами вязкости и теплопроводности, используется полная система уравнений Навье-Стокса, которая, будучи записанной в безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести в векторной форме, имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где значения безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности следующие:  $\mu_0 = 0.001$ ,  $\kappa_0 \approx 1.458333 \mu_0$ .

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде.

Система не содержит слагаемое, описывающее ускорение Кориолиса, поскольку в данной работе оно полагается несущественным.

В системе (1):  $t$  — время;  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $\rho$  — плотность газа;  $\vec{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси;  $T$  — температура газа;  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  — вектор ускорения силы тяжести;  $\gamma = 1.4$  — показатель политропы для воздуха;  $\nabla$  и  $div$  — операторы градиента и дивергенции по декартовым пространственным переменным, точкой обозначено скалярное произведение векторов.

Система (1) имеет смешанный тип: первое уравнение образует гиперболическую часть системы, так как определяет в течениях сжимаемого теплопроводного вязкого газа наличие слабого разрыва на контактной поверхности; второе и третье уравнения составляют параболическую часть системы, так как содержат вторые производные скорости и температуры по пространственной переменной.

В скалярной форме полная система уравнений Навье-Стокса (1) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \frac{1}{\gamma}T_x = \\ \frac{\mu_0}{\rho}\left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz}\right), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = \\ \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz}\right), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = -g + \\ + \frac{\mu_0}{\rho}\left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz}\right), \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\gamma - 1)T(u_x + v_y + w_z) = \\ = \frac{\kappa_0}{\rho}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma - 1)}{2\rho}\left\{\left[(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2\right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2}\left[(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2\right]\right\}. \end{array} \right.$$

**Начальные и граничные условия.** В качестве начальных условий при описании соответствующих течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности в данной работе берутся функции, задающие точное решение [12] системы (1):

$$u = 0, v = 0, w = 0, T_0(z) = 1 - kz, k = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, l = 0.0065 \frac{\text{K}}{\text{м}}, x_{00} = 10^5 \text{ м}, T_{00} = 288^\circ \text{K} \quad (3)$$

$$\text{и} \quad \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}; \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон  $x^0 = 1$ ,  $y^0 = 1$  и  $z^0 = 0.1$  вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Для плотности на всех шести гранях параллелепипеда:  $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z^0$  — ставится «условие непрерывности» потока, которое означает, что значения искомой функции на границу области сносятся линейной интерполяцией по нормали к данной граничной поверхности из внутренней части расчетной области [13].

Краевые условия для компонент вектора скорости газа берутся соответствующими «условиям непротекания» для нормальной составляющей вектора скорости и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [13].

Для температуры на пяти гранях задаются условия теплоизоляции [13].

На плоскости  $z = 0$  значения температуры заданы в виде функции

$$T|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1 + M(1 - e^{-10t}) \cos^6 \left( \pi \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \right), \quad (5)$$

моделирующей локальный нагрев поверхности Земли [15]. Множитель  $M$  в формуле (5) равен превышению максимального безразмерного значения температуры над масштабным единичным значением и варьируется в процессе выполнения расчетов.

**Разностная аппроксимация начальных и краевых условий.** Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_k$ , где  $x_i = i \cdot \Delta x$ ,  $y_j = j \cdot \Delta y$ ,  $z_k = k \cdot \Delta z$ ,  $0 \leq i \leq L$ ,  $0 \leq j \leq M$ ,  $0 \leq k \leq N$ .  $\Delta x = x^0 / L$ ,  $\Delta y = y^0 / M$ ,  $\Delta z = z^0 / N$  — разностные шаги по трем пространственным переменным.

Поскольку в начальный момент времени  $t = 0$  во всех точках прямоугольного параллелепипеда все искомые функции заданы

$$\vec{U}|_{t=0} = \vec{U}^0, \quad (6)$$

то с помощью явной разностной схемы

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \Delta t \cdot F(\vec{U}^n); \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix} \quad (7)$$

вычисляются значения всех искомым функций во всех внутренних точках прямоугольного параллелепипеда.

После этого значения искомым функций определяются во всех внутренних точках каждой из шести граней:  $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z^0$ .

Значения всех искомым функций во внутренних точках всех двенадцати ребер прямоугольного параллелепипеда находятся как среднее арифметическое двух промежуточных значений, определенных линейной интерполяцией по значениям функций в двух точках на нормалях к ребру в каждой из граней.

В вершинах прямоугольного параллелепипеда значения берутся как среднее арифметическое трех промежуточных значений, определенных линейной интерполяцией по значениям функций в двух точках вдоль каждого из трех ребер.

**Результаты расчетов.** Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно  $\rho_{00} = 1.2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $u_{00} = 333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $x_{00} = 100000 \text{ м}$ ,  $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 300.3 \text{ с}$ .

Разностные шаги по трем пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.01$ , а шаг по времени  $\Delta t = 0.001$ .

В работе [14] были представлены результаты расчетов всех газодинамических параметров нестационарного трехмерного конвективного течения при одном значении максимального нагрева нижней плоскости расчетной области. В данной работе сосредоточимся на результатах расчета только скоростных характеристик такого конвективного течения, но при семи различных фиксированных максимальных температурах нагрева нижней плоскости расчетной области. При этом уделим особое внимание температурным зависимостям трех составляющих компонент скоростей конвективного потока.

В табл. 1 приведены фиксированные безразмерные и соответствующие размерные значения коэффициента  $M$ , для каждого из которых проведены расчеты.

Таблица 1

Значения коэффициента  $M$ 

безразмерное $M$	0.035	0.065	0.095	0.125	0.155	0.185	0.215
размерное $M^*$ , °К	10.08	18.72	27.36	36.00	44.74	53.28	61.92
$T_{00} + M^*$ , °К	298.08	306.72	315.36	324.00	332.74	341.28	349.92
$T_{00} + M^*$ , °С	25.08	33.72	42.36	51.00	59.74	68.28	76.92

Все последующие результаты будут относиться к тому расчетному моменту времени, для которого происходит выход нестационарного конвективного потока на стационарный режим.

На рис. 1 представлены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой  $u$ , второй  $v$ , максимального и минимального значений третьей  $w$  компоненты скорости течения газа на нижней грани расчетной области при  $z = 0$ .

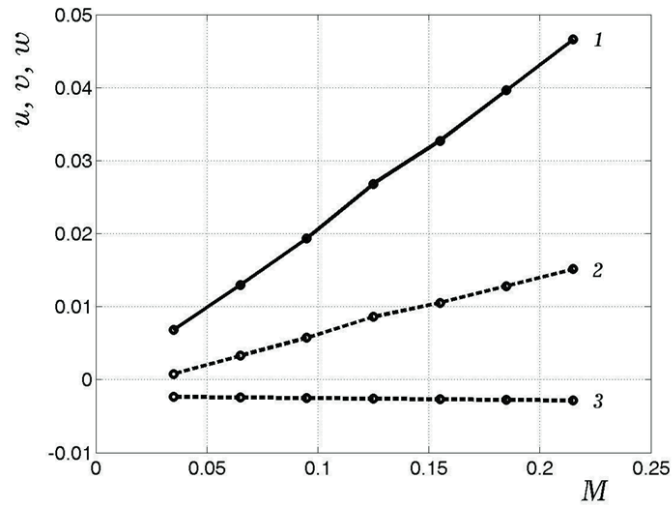


Рис. 1. Температурные зависимости скоростей на высоте  $h = 0$  км.  
1 — скорости  $u$  и  $v$ ; 2 — максимум скорости  $w$ ; 3 — минимум скорости  $w$

На рис. 2 представлены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой  $u$ , второй  $v$ , максимального и минимального значений третьей  $w$  компоненты скорости течения газа на средней плоскости расчетной области при  $z = 0.05$ .

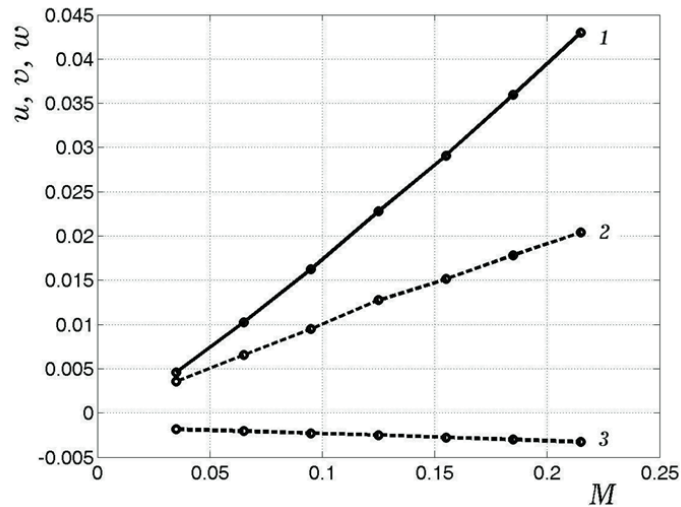


Рис. 2. Температурные зависимости скоростей на высоте  $h = 5$  км.  
1 — скорости  $u$  и  $v$ ; 2 — максимум скорости  $w$ ; 3 — минимум скорости  $w$

На рис. 3 приведены графики температурных зависимостей максимального значения модуля первой  $u$ , второй  $v$ , максимального и минимального значений третьей компоненты  $w$  скорости течения газа на верхней грани расчетной области при  $z = 0.1$ .

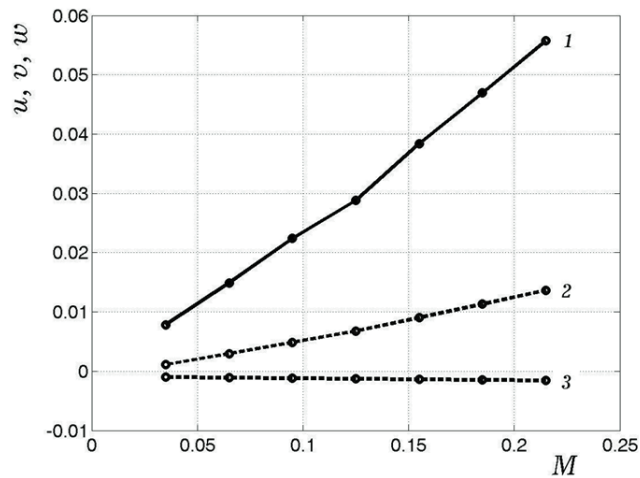


Рис. 3. Температурные зависимости скоростей на высоте  $h = 10$  км.  
1 — скорости  $u$  и  $v$ ; 2 — максимум скорости  $w$ ; 3 — минимум скорости  $w$

Как следует из приведенных графиков, общей чертой в поведении скоростей теплового конвективного потока является их практически линейная зависимость от максимальной температуры нагрева. При этом для диапазона изменения максимальной температуры нагрева  $0.18$  (размерное значение  $51.84^\circ\text{C}$ ) интервал изменения модуля первой  $u$  и второй  $v$  компоненты скорости течения газа в безразмерном виде составляет в среднем  $0.045$  (размерное значение  $14.985$  м/с), а интервал изменения модуля третьей компоненты  $w$  скорости газа —  $0.0175$  (размерное значение  $5.828$  м/с).

На рис. 4-6 представлены мгновенные линии тока конвективного течения газа для трех различных моментов времени: под буквой  $a$  изображены линии тока, рассчитанные для значения коэффициента  $M=0.035$ , а под буквой  $b$  — для значения коэффициента  $M=0.215$ .

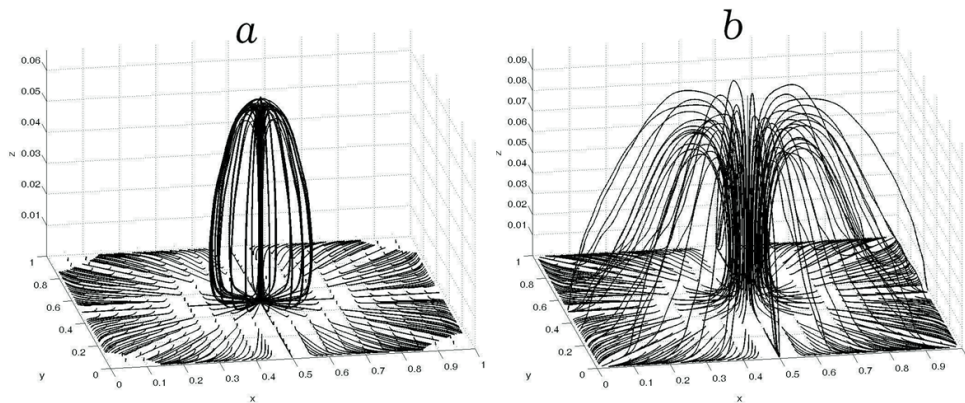


Рис. 4. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:  
 $a$  — для  $M=0.035$ ,  $b$  — для  $M=0.215$

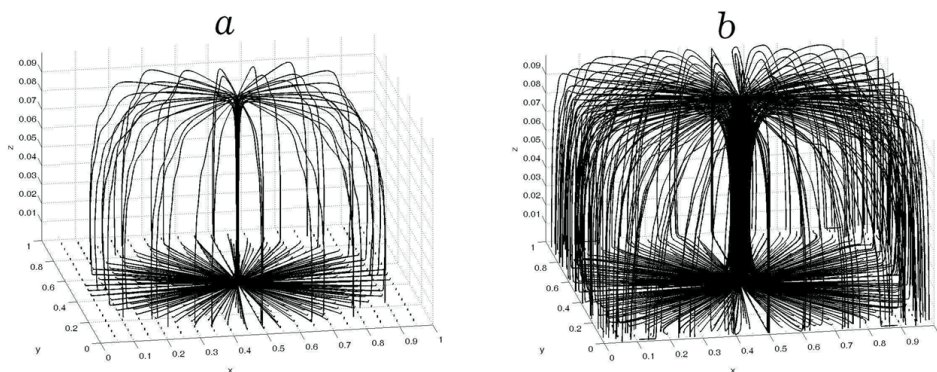


Рис. 5. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:  
*a* — для  $M=0.035$ , *b* — для  $M=0.215$

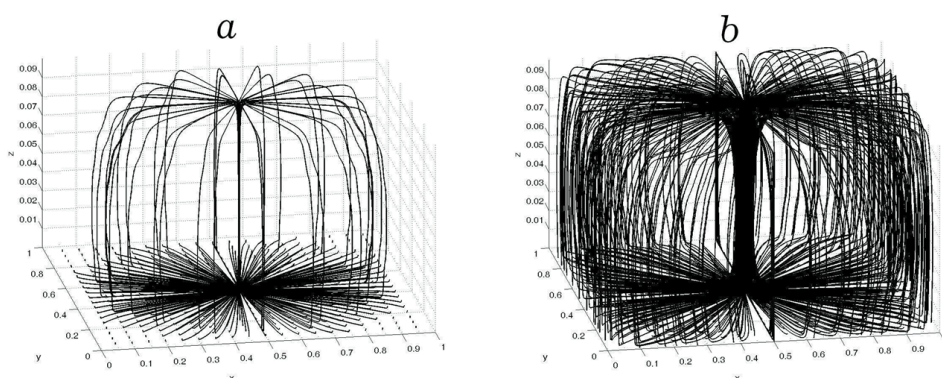


Рис. 6. Мгновенные линии тока конвективного течения газа:  
*a* — для  $M=0.035$ , *b* — для  $M=0.215$

Из сопоставления приведенных рисунков для линий тока можно сделать следующие выводы. Очевидно, что для одних и тех же моментов времени густота мгновенных линий тока существенно отличается — для более низкой температуры нагрева ( $M=0.035$ ) она значительно меньше, чем при большей температуре нагрева ( $M=0.215$ ). При этом важно подчеркнуть, что в расчетах количество линий тока, выпускаемых из плоскости  $z = 0$ , в обоих случаях одинаково. Различие в густоте линий тока означает различие в интенсивности конвективного потока за счет различия скоростей течения при разных температурах нагрева.

Кроме того, формирование конвективного потока при более высоких температурах нагрева происходит существенно быстрее, чем при низких температурах. На рисунках видно, что при низкой температуре мгновенные линии тока не достигают боковых граней расчетной области. Поэтому данный конвективный поток в некотором смысле не является полноценным, в отличие от конвективного потока при высокой температуре.

Результатом данной работы является то, что численным решением в нестационарном трехмерном случае полной системы уравнений Навье-Стокса с корректно поставленными начальными и краевыми условиями получено конвективное течение, вызванное нагревом придонной части. Проведено исследование зависимости скоростей течений в конвективном потоке от температуры нагрева.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
2. Баутин С.П. Представление решений системы уравнений Навье-Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. 1987. Т.51, Вып. 4. С. 574-584.
3. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
4. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 175-183.
5. Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. 2012. № 4. Серия «Физико-математические науки. Информатика». С. 183-189.
6. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 4. С. 567-570.
7. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 215 с.
8. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
9. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 6. С. 965-972.
10. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 2. С. 317-320.
11. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 312 с.
12. Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 4. С. 81-86.
13. Баутин С.П., Обухов А.Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 5. С. 55-63.
14. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 6. С. 57-63.
15. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Математическое моделирование нагрева поверхности Земли // Сб. м-лов VII Междунар. науч.-практич. конф. «Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты». Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2013. С. 116-120.

## REFERENCES

1. Bautin, S.P. *Kharakteristicheskaja zadacha Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).
2. Bautin, S.P. Presentation of solutions to the Navier-Stokes equations in the neighborhood of the contact data. *Prikladnaia matematika i mekhanika — Applied Mathematics and Mechanics*. 1987. V. 51. № 4. Pp. 574-584. (in Russian).
3. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. *Matematicheskoe modelirovanie razrushitel'nykh atmosferynykh vikhrei* [Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices]. Novosibirsk: Nauka, 2012. 152 p. (in Russian).

4. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical simulation of the flows in the bottom part of the tropical cyclone. *Vestnik Tiimenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Series «Physical and mathematical sciences. Computer Sciences». Pp. 175-183. (in Russian).
5. Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical calculations of the currents in the bottom part of the tornado. *Vestnik Tiimenskogo gosudarstvennogo universiteta — Tyumen State University Herald*. 2012. № 4. Series «Physical and Mathematical Sciences. Computer Sciences». Pp. 183-189. (in Russian).
6. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of the bottom part of the ascendant swirling flow. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo Physics of High Temperatures*. 2013. V. 51. № 4. Pp. 567-570. (in Russian).
7. Bautin, S.P., Krutova, I.Iu., Obukhov, A.G., Bautin, K.V. *Razrushitel'nye atmosferynye vikhri: teoremy, raschety, eksperimenty* [Destructive atmospheric vortices: Theorem, calculations, experiments]. Novosibirsk, 2013. 215 p. (in Russian).
8. Bautin, S.P. *Tornado i sila Koriolisa* [Tornado and the Coriolis force]. Novosibirsk: Nauka, 2008. 96 p. (in Russian).
9. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. Thermal modeling of free vortex generation, stability, control. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo Physics of High Temperatures*. 2010. V. 48. № 6. Pp. 965-972. (in Russian).
10. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. Physical modeling of air tornadoes: some dimensionless parameters. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermo Physics of High Temperatures*. 2011. V. 49. № 2. Pp. 317-320. (in Russian).
11. Varaksin, A.Iu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. *Tornado* [Tornado]. Moscow, 2011. 312 p. (in Russian).
12. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. One exact stationary solution of the equations of gas dynamics. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. № 4. Pp. 81-86. (in Russian).
13. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. A form of the boundary conditions in the calculation of three-dimensional unsteady compressible viscous heat-conducting gas. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. № 5. Pp. 55-63. (in Russian).
14. Obukhov, A.G., Sorokina, E.M. Mathematical modeling and numerical simulation of three-dimensional convective flow of gas. *Izvestiia vuzov. Neft' i gaz — Proceedings of higher education institutions. Oil and gas*. 2013. Pp. 57-63. (in Russian).
15. Obukhov, A.G., Abdubakova, L.V. Mathematical modeling of the Earth surface heating. *Sb. m-lov VII Mezhdunar. nauch.-praktich. konf. «Fundamental'nye i prikladnye issledovaniia: problemy i rezul'taty»* [Collected materials of the 7<sup>th</sup> Intern. sci. and pract. conf. Fundamental and applied research: problems and results]. Novosibirsk, 2013. Pp. 116-120. (in Russian).

#### Авторы публикации

**Сорокина Елена Михайловна** — старший преподаватель кафедры естественно-научных дисциплин Военного учебно-научного центра сухопутных войск «Общевойсковая академия Вооруженных Сил Российской Федерации» (филиал в г. Тюмень)

**Обухов Александр Геннадьевич** — профессор кафедры высшей математики Тюменского государственного нефтегазового университета, доктор физико-математических наук

#### Authors of the publication

**Elena M. Sorokina** — Senior Lecturer, Affiliate of the Military Education-Research Center Forces «Combined Arms Academy of the Russian Federation Armed Forces» (Tyumen)

**Alexander G. Obukhov** — Dr. Sci. (Physic.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Tyumen State Oil and Gas University